COMPTES RENDUS

(DOKLADY)

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

NOUVELLE SÉRIE

1936

IMPERIAL MYCOLOGICAL INSTITUTE
21 DEC 1936

VOLUME IV

№ 5

ÉDITION DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
MOSCOU

AVIS AUX AUTEURS

Les «Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS» sont publiés en livraisons, neuf numéros formant un volume d'environ 500 pages pourvu de sa table des matières.

Les «Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS» publient des communications préalables des auteurs précisant le contenu essentiel des travaux plus volumineux en préparation. Ces articles, ne dépassant pas comme règle dix mille signes typographiques, sont donnés en l'une des trois langues: français, anglais, allemand. Ils embrassent les sciences mathématiques, physiques et naturelles et les aspects théoriques des applications techniques, reproduisant des résultats de recherches scientifiques actuellement en cours ou à peine achevées qui représentent les plus récentes acquisitions de l'investigation scientifique.

Les articles sont publiés dans la langue de l'original envoyé par l'auteur (français, anglais, allemand).

Les auteurs ont droit chacun à 25 extraits gratuits.

Les manuscrits doivent être adressés à la Rédaction de «Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS»—Moscou, oulitza Koujbysheva, 8.

COMPTES RENDUS

(DOKLADY)

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

NOUVELLE SÉRIE

4-me année

Paraissant tous les dix jours

COMITÉ DE RÉDACTION

A. Borissiak, de l'Académie, A. Fersman, de l'Académie, A. Richter, de l'Académie,
S. Wawilow, de l'Académie

1936

VOLUME IV (XIII)—№ 5 (109)

Moscou

TABLE DES MATIÈRES

MATHÉMATIQUES

G. V. Pfeiffer, de l'Académie Ukranienne. Sur l'expression de fonctions par des fonctions 210
M. Lavrentiev. Sur la continuité des fonctions univalentes 215
L. Kantorovič. On a Class of Functional Equations 219
Gr. Fichtenholz. Sur les fonctionnelles linéaires continues au sens généralisé 225

PHYSIQUE

V. Fock, korrespondierendes Mitglied der Akademie. Über die Unmöglichkeit einer Neutrinotheorie des Lichtes 229

ZOOLOGIE

F. N. Kirillov. The Sand-Eel of Novaya Zemlya (*Ammodytes marinus* Raitt) . 233

EMBRYOLOGIE

D. M. Fedotov. Über die späte postembrionale Entwicklung des Frostspanners (*Operophthera brumata* L.). 237

Imprimé par l'ordre de l'Académie des Sciences de l'URSS
Secrétaire perpétuel membre de l'Académie **N. Gorbounov.**

Comité de Rédaction: **A. Borissiak,** de l'Académie, **A. Fersman,** de l'Académie, **A. Richter,** de l'Académie, **S. Wawilow,** de l'Académie.

Rédacteur en chef A. Fersman. Rédacteur S. Bernstein.

En composition: 13. X. 1936.—En impression: 16/XI. 1936. Nombre de feuilles d'imprimerie 2—Nombre de caractères par feuille imprimée 65000.—Pages 209—240. Format du papier 72×110 cm—Tirage 1 300. Moscou. Glavlit B 50722 Numéro d'édition 438.—Numéro typographique 1372.

Imprimerie № 16, Moscou, Trekhproudnij péréoulok, 9.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume IV (XIII), № 5 (109)

MATHÉMATIQUES

SUR L'EXPRESSION DE FONCTIONS PAR DES FONCTIONS

Par G. V. PFEIFFER, de l'Académie Ukranienne

Nous avons introduit dans le domaine de l'intégration des systèmes complets d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue la notion du *système de systèmes complets successifs* (1); nous le désignons par S). Dans le mémoire présent nous utiliserons cette notion pour éclaircir les diverses possibilités d'exprimer des fonctions par des fonctions.

Un système complet donné d'équations linéaires et homogènes peut-être réduit au système S) d'une infinité de manières (2). Considérons les formes caractéristiques des systèmes S), liés à un même système complet d'équations linéaires et homogènes.

La forme normale d'un système complet d'équations linéaires et homogènes, possédant les intégrales

$$\varphi_1,\ \varphi_2, \cdots,\ \varphi_{q+1}, \tag{1}$$

$$\varphi_i \equiv \varphi_i(x_0,\ x_1, \cdots, x_n), \tag{2}$$

indépendantes par rapport aux variables $x_0,\ x_1, \cdots,\ x_q$ est la suivante

$$A) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_k} = \alpha_q^k \frac{\partial f}{\partial x_q} + \alpha_{q-1}^k \frac{\partial f}{\partial x_{q-1}} + \cdots + \alpha_1^k \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_0^k \frac{\partial f}{\partial x_0}, \tag{3}$$

$$k = q+1,\quad q+2, \cdots,\ n,$$

où

$$\alpha_j^k = \frac{\dfrac{D(\varphi_1,\ \varphi_2, \cdots,\ \varphi_{q+1})}{D(x_0, \cdots, x_{j-1}, x_k, x_{j+1}, \cdots, x_q)}}{\dfrac{D(\varphi_1,\ \varphi_2, \cdots,\ \varphi_{q+1})}{D(x_0, x_1, \cdots, x_q)}}, \qquad j = 0,\ 1, \cdots,\ q. \tag{4}$$

Nous avons montré (3), que le système complet aux intégrales 1), réduit à la forme

$$\left.\begin{aligned} X_n(f) = \frac{\partial f}{\partial x_n} - \Big(&\pi_{n-1}^n \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} + \pi_{n-2}^n \frac{\partial f}{\partial x_{n-2}} + \cdots + \\ &+ \pi_1^n \frac{\partial f}{\partial x_1} + \pi_0^n \frac{\partial f}{\partial x_0}\Big) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
X_{n-1}(f) &= \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} - \left(\pi_{n-2}^{n-1}\frac{\partial f}{\partial x_{n-2}} + \pi_{n-3}^{n-1}\frac{\partial f}{\partial x_{n-3}} + \ldots + \right.\\
&\qquad \left. + \pi_1^{n-1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \pi_0^{n-1}\frac{\partial f}{\partial x_0}\right) = 0,\\
B)\qquad &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
X_{q+2}(f) &= \frac{\partial f}{\partial x_{q+2}} - \left(\pi_{q+1}^{q+2}\frac{\partial f}{\partial x_{q+1}} + \pi_q^{q+2}\frac{\partial f}{\partial x_q} + \ldots + \right.\\
&\qquad \left. + \pi_1^{q+2}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \pi_0^{q+2}\frac{\partial f}{\partial x_0}\right) = 0,\\
X_{q+1}(f) &= \frac{\partial f}{\partial x_{q+1}} - \left(\pi_q^{q+1}\frac{\partial f}{\partial x_q} + \pi_{q-1}^{q+1}\frac{\partial f}{\partial x_{q-1}} + \ldots + \right.\\
&\qquad \left. + \pi_1^{q+1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \pi_0^{q+1}\frac{\partial f}{\partial x_0}\right) = 0
\end{aligned}
\right\} \qquad (5)
$$

est un système S). En rayant les équations de haut en bas on obtient des systèmes S).

Le système B) a été nommé système S), généralisant le système de Jacobi [4].

Écrivons le système A) sous la forme

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x_{q+1}} = \alpha_q^{q+1}\frac{\partial f}{\partial x_q} + \alpha_{q-1}^{q+1}\frac{\partial f}{\partial x_{q-1}} + \ldots + \alpha_1^{q+1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_0^{q+1}\frac{\partial f}{\partial x_0},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
C)\qquad &\frac{\partial f}{\partial x_{q+r}} = \alpha_q^{q+r}\frac{\partial f}{\partial x_q} + \alpha_{q-1}^{q+r}\frac{\partial f}{\partial x_{q-1}} + \ldots + \alpha_1^{q+r}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_0^{q+r}\frac{\partial f}{\partial x_0};
\end{aligned}
\right\} \qquad (6)
$$

$$
\frac{\partial f}{\partial x_k} = \alpha_q^k\frac{\partial f}{\partial x_q} + \alpha_{q-1}^k\frac{\partial f}{\partial x_{q-1}} + \ldots + \alpha_1^k\frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_0^k\frac{\partial f}{\partial x_0}, \qquad (7)
$$

$$
k = q+r+1,\quad q+r+2,\ \ldots\ n.
$$

Par une combinaison linéaire des équations (6), (7), en utilisant r fonctions arbitraires $u_1, u_2, \ldots, u_r$, on peut remplacer le système C) par le système

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x_{q+1}} = \alpha_q^{q+1}\frac{\partial f}{\partial x_q} + \alpha_{q-1}^{q+1}\frac{\partial f}{\partial x_{q-1}} + \ldots + \alpha_1^{q+1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_0^{q+1}\frac{\partial f}{\partial x_0},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
D)\qquad &\frac{\partial f}{\partial x_{q+r}} = \alpha_q^{q+r}\frac{\partial f}{\partial x_q} + \alpha_{q-1}^{q+r}\frac{\partial f}{\partial x_{q-1}} + \ldots + \alpha_1^{q+r}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_0^{q-r}\frac{\partial f}{\partial x_0},
\end{aligned}
\right\} \qquad (8)
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_k} &= \delta_{q+r}^k\frac{\partial f}{\partial x_{q+r}} + \delta_{k+r-1}^k\frac{\partial f}{\partial x_{q+r-1}} + \ldots +\\
&+ \delta_{q+1}^k\frac{\partial f}{\partial x_{q+1}} + \delta_q^k\frac{\partial f}{\partial x_q} + \ldots + \delta_1^k\frac{\partial f}{\partial x_1} + \delta_0^k\frac{\partial f}{\partial x_0},
\end{aligned} \qquad (9)
$$

$$
k = q+r+1,\quad q+r+2,\ \ldots,\ n\ [5].
$$

Les équations (9) forment un système en involution avec les intégrales

$$
\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{q+1}, u_1, u_2, \ldots u_r. \qquad (10)
$$

En remplaçant dans le système D) r par $r-1$, $r-2$, ..., nous obtenons des systèmes D_1), D_2), ..., contenant les systèmes en involution G_1), G_2), ..., qui sont semblables au système (9). En unissant

les premières équations des systèmes $G_1)$, $G_2)$, ... , et le système (9), nous arriverons au système

$$G)\quad \left.\begin{aligned} Y_{q+1}(f) &= \frac{\partial f}{\partial x_{q+1}} - \left(\alpha_q^{q+1}\frac{\partial f}{\partial x_q} + \ \dots\ + \alpha_1^{q+1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_0^{q+1}\frac{\partial f}{\partial x_0}\right) = 0, \\ Y_{q+2}(f) &= \frac{\partial f}{\partial x_{q+2}} - \left(\beta_{q+1}^{q+2}\frac{\partial f}{\partial x_{q+1}} + \ \dots\ + \beta_1^{q+2}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \beta_0^{q+2}\frac{\partial f}{\partial x_0}\right) = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y_{q+r}(f) &= \frac{\partial f}{\partial x_{q+r}} - \left(\gamma_{q+r-1}^{q+r}\frac{\partial f}{\partial x_{q+r-1}} + \ \dots\ + \gamma_1^{q+r}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \gamma_0^{q+r}\frac{\partial f}{\partial x_0}\right) = 0; \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

$$\left.\begin{aligned} Y_k(f) &= \frac{\partial f}{\partial x_k} - \left(\delta_{q+r}^k\frac{\partial f}{\partial x_{q+r}} + \ \dots\ + \delta_1^k\frac{\partial f}{\partial x_1} + \delta_0^k\frac{\partial f}{\partial x_0}\right) = 0 \\ & k = q+r+1, \ \dots\ , n. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Le système $G)$ est un système $S)$; il donne des systèmes $S)$, quand on raye les équations de haut en bas et de bas en haut.

Désignons par

$$\omega_1, \ \omega_2, \ \dots\ , \ \omega_{q+r+1} \qquad (13)$$

les intégrales du système (12), alors les intégrales des systèmes

$$\left.\begin{aligned} &Y_{q+r}(f) = 0, \qquad Y_k(f) = 0; \\ &Y_{q+r-1}(f) = 0, \quad Y_{q+r}(f) = 0; \quad Y_k(f) = 0; \quad k = q+r+1, \ \dots\ , n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &Y_{q+1}(f) = 0, \qquad Y_{q+2}(f) = 0, \ \dots\ , Y_{q+r}(f) = 0, \qquad Y_k(f) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

ont la forme

$$\left.\begin{aligned} &\Theta_j^{q+r}(\omega_1, \ \omega_2, \ \dots\ \omega_{q+r+1}), && j = 1, \ 2, \ \dots\ , \ q+r; \\ &\Theta_j^{q+r-1}(\Theta_1^{q+r}, \ \Theta_2^{q+r}, \ \dots\ , \ \Theta_{q+r}^{q+r}), && j = 1, \ 2, \ \dots\ , \ q+r-1; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\Theta_j^{q+1}(\Theta_1^{q+2}, \ \Theta_2^{q+2}, \ \dots\ , \ \Theta_{q+r}^{q+2}), && j = 1, \ 2, \ \dots\ , \ q+1. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

En désignant les intégrales de l'équation

$$Y_{q+1}(f) = 0 \qquad (16)$$

par

$$\tilde{\omega}_1, \ \tilde{\omega}_2, \ \dots\ , \ \tilde{\omega}_{q+1}, \ x_{q+2} \ \dots\ , \ x_n, \qquad (17)$$

nous aurons les intégrales des systèmes

$$\left.\begin{aligned} &Y_{q+1}(f) = 0, \qquad Y_{q+2}(f) = 0; \\ &Y_{q+1}(f) = 0, \qquad Y_{q+2}(f) = 0, \qquad Y_{q+3}(f) = 0; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &Y_{q+1}(f) = 0, \qquad Y_{q+2}(f) = 0, \ \dots\ , \ Y_n(f) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

sous la forme

$$\left.\begin{aligned} &\Theta_j^{q+2}(\tilde{\omega}_1, \ \dots\ , \ \tilde{\omega}_{q+1}, \ x_{q+2}, \ \dots\ , \ x_n), \ x_{q+3}, \ \dots\ , \ x_n; \\ &\Theta_j^{q+3}(\Theta_1^{q+2}, \ \dots\ , \ \Theta_{q+1}^{q+2}, \ x_{q+3}, \ \dots\ , \ x_n), \ x_{q+4}, \ \dots\ , \ x_n; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\Theta_j^n(\Theta_1^{n-1}, \ \dots\ , \ \Theta_{q+1}^{n-1}, \ x_n). \\ &\quad j = 1, \ 2, \ \dots\ . \ q+1 \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Si les fonctions (1) sont données, alors la construction du système complet des équations linéaires homogènes (3), avec les integrales (1), donne la possibilité d'étudier les modes d'exprimer les fonctions (1) par des fonctions, en réduisant le système (3) aux divers systèmes S). La résolution de pareilles questions est très intéressante dans le cas, où les fonctions (1) contiennent des paramètres ([6]).

Le système B) joue un rôle important dans «La généralisation de la méthode de Jacobi pour l'intégration des systèmes complets d'équations linéaires...» ([1]); les systèmes G) dans «La méthode spéciale d'intégration des systèmes complets d'équations linéaires...» ([7]) et ses généralisations.

Manuscrit reçu
le 21. VI. 1936.

LITTÉRATURE CITÉE

[1] Acta math., B. 61, pp. 203—238 (1933). [2] Ibidem, p. 217. [3] Ibidem, p. 222. [4] Ibidem, p. 224. [5] Bull. de l'Acad. des Sci. de l'URSS, № 2, pp. 177—214, (1933). [6] C. R., t. 196, pp. 883—885 (1933); Bull. de l'Acad. des Sc. de Belgique, S. 5, t. XIX, pp. 44—64 (1933). [7] C. R. de l'Acad. des Sci. de Paris, 101, pp. 425—427 (1925).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume IV (XIII), № 5 (109)

MATHÉMATIQUES

SUR LA CONTINUITÉ DES FONCTIONS UNIVALENTES

Par M. LAVRENTIEV

(Présenté par I. M. Vinogradow, de l'Académie, le 2. X. 1936)

Pour simplifier l'énoncé du théorème fondamental de cette Note, introduisons une notion nouvelle, celle de «distance» relative entre deux points d'un domaine. Soit D un domaine borné et simplement connexe, contenant le point $z=0$, soit Γ la frontière de D et soient z_1 et z_2 deux points quelconques du domaine D. Désignons par $\rho_1(z_1, z_2)$ la borne inférieure des longueurs des lignes contenues dans D et joignant z_1 et z_2, designons par $\rho_2(z_1, z_2)$ la borne inférieure des longueurs des lignes qui coupent D en deux domaines simplement connexes, de sorte que z_1 et z_2 appartiennent à celui de ces domaines qui ne contient pas le point $z=0$. Le plus petit des deux nombres $\rho_1(z_1, z_2)$ et $\rho_2(z_1, z_2)$ sera appelé «distance» entre z_1 et z_2 par rapport à D. Nous allons désigner cette distance par $\rho(z_1, z_2, D)$.

Nous appelons «point» frontière de D chaque suite de points de D $z_1, z_2, \ldots z_n, \ldots$ ayant tous ses points limites sur Γ et telle que $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \rho(z_n, z_m, D) = 0$. Nous disons que deux points frontières de D, $\{z_n^{(1)}\}$ et $\{z_n^{(2)}\}$ sont identiques, si nous avons $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(z_n^{(1)}, z_n^{(2)}, D) = 0$.

Soit maintenant $t_1 = \{z_n^{(1)}\}$ et $t_2 = \{z_n^{(2)}\}$ deux «points» quelconques du domaine fermé $\overline{D} = D + \Gamma$, le nombre $\rho(t_1, t_2, D) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(z_n^{(1)}, z_n^{(2)}, D)$ sera appelé «distance» entre t_1 et t_2.

Il est évident que chaque «point» frontière de D est un but simple au sens de M. Carathéodory. Ces définitions ayant posées, on peut démontrer le théorème général suivant:

Théorème. *Soit* $z = f(w)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ *une fonction univalente et bornée dans le cercle-unité* $|w| < 1$, $|f(w)| < M = \text{const}$ *et soit* D *l'image du cercle* $|w| < 1$ *dans la représentation* $z = f(w)$. *Alors*

$$|w_2 - w_1| < K_1 \sqrt{\rho(z_1, z_2, D)}, \qquad \text{(a)}$$

$$\rho(z_1, z_2, D) < K(M) \left| \log |w_2 - w_1| \right|^{-\frac{1}{2}}, \qquad \text{(b)}$$

où w_1 et w_2 *sont deux points quelconques du cercle* $|w| \leqslant 1$, z_1 *et* z_2 *sont les points correspondants du domaine* D, $z_1 = f(w_1)$, $z_2 = f(w_2)$, K_1 *est une constante absolue et* $K(M)$ *ne dépend que de* M.

Indiquons brièvement les points essentiels de la démonstration. D'après les définitions posées, il suffit de considerer le cas où la frontière Γ de D est une courbe fermée analytique et de supposer que l'un des deux points z_1 et z_2 appartient à Γ.

Cela posé, considérons l'inégalité (a). Soit t le point de Γ le plus «voisin» de z_2 et soit s le point correspondant de la circonférence $|w| = 1$, $t = f(s)$. Soit γ l'arc dont la longueur définit la «distance» entre z_1 et t. Désignons par $D_1 = D_1(\gamma)$ le domaine simplement connexe tel que 1) D_1 est contenu dans D, 2) D_1 contient le point $z = 0$, 3) la frontière Γ_1 de D_1 contient γ. Faisons la représentation conforme $w = \varphi_1(z)$, $\varphi_1(0) = 0$, du domaine D_1 sur le cercle $|w| < 1$ et soit l la longueur de l'arc, correspondante à γ. D'après le principe de Montel (1) nous avons $l > |w_1 - s|$, d'autre part, d'après le théorème de Schmidt (2) nous avons $l < K' \sqrt{\rho(z_1, s, D)}$. Donc,

$$|w_1 - s| < K' \sqrt{\rho(z_1, s, D)} < K' \sqrt{\rho(z_1, z_2, D)}.$$

Pour évaluer $|w_1 - s|$ considérons deux cas possibles: 1) $|z_2 - t| \leqslant \rho(z_1, z_2, D)$, dans ce cas, d'après les inégalités de Köbe (3) nous avons $|w_2 - s| < K'' \sqrt{\rho(z_1, z_2, D)}$, 2) $|z_2 - t| > \rho(z_1, z_2, D)$; reprenons l'arc γ qui définit la «distance» entre z_2 et t. Dans la représentation conforme $w = \varphi_1(z)$, $\varphi_1(0) = 0$, du domaine $D_1(\gamma)$ il correspond à l'arc γ un arc dont la longueur ne dépasse pas $K' \sqrt{\rho(z_1, z_2, D)}$; donc, dans la représentation $z = f(w)$ il correspond à l'arc γ un arc dont le diamètre ne dépasse pas $K'' \sqrt{\rho(z_1, z_2, D)}$. Par conséquent, en remarquant que t est extérieur à D_1, nous avons $|w_2 - s| < K'' \sqrt{\rho(z_1, z_2, D)}$. Donc, $|w_2 - w_1| \leqslant |w_2 - s| + |w_1 - s| < (2K' + K'') \sqrt{\rho(z_1, z_2, D)}$.

Considérons maintenant l'inégalité (b). Pour fixer les idées, supposons que z_1 et z_2 sont situés sur Γ. Traçons dans le cercle $|z| < 2M$ un arc analytique L, joignant les points $z = 0$ et $z = 2M$ et tel que deux normales, issues de deux points différents de L et de longueur $\rho_0 = \rho(z_1, z_2, D)$ ne se coupent pas. Désignons par Δ le domaine balayé par le cercle $|z - x| \leqslant \rho_0$, dont le centre x décrit la courbe L, et soit γ la partie de la frontière de D, appartenant à la circonférence $|z - 2M| = \rho_0$. L'aire de Δ_2 ne dépasse pas $\pi(2M + \rho_0)^2$, donc la longueur de L ne dépasse pas $\frac{\pi(2M + \rho_0)^2}{\rho}$. Faisons la représentation conforme $w = \varphi(z)$, $\varphi(0) = 0$, du domaine Δ sur le cercle $|w| < 1$ et soit h la longueur de l'arc, qui correspond à γ. D'une part, en appliquant un lemme de Grotzsch (4), il est facile de voir que

$$h > e^{-\left(\frac{K(M)}{\rho_0}\right)^2},$$

d'autre part, en appliquant le principe de Montel, il est facile de démontrer qu'il existe une courbe h, telle que $h < |w_2 - w_1|$. Donc,

$$|w_2 - w_1| > e^{-\left(\frac{K}{\rho_0}\right)^2}.$$

Du théorème démontré on déduit immédiatement les théorèmes fondamentaux de Carathéodory sur la correspondance des frontières dans la représentation conforme; ainsi que les théorèmes de Courant et Farrel sur la convergence uniformes des suites de fonctions univalentes.

Institut mathématique
W. A. Stekloff.
Académie des Sciences de l'URSS.
Moscou.

Manuscrit reçu
le 2. X. 1936.

LITTÉRATURE CITÉE

[1] G. Pólya u. Szegö, Lehrsätze aus der Analysis, II, No. 131. [2] M. Lavrentieff, Travaux de l'Institut math. de l'Acad. des Sci. de l'URSS, t. V, p. 190. [3] G. Pólya u. Szegö, loc. cit., No 152. [4] Grotzsch, Ber. der Sächs. Acad. Wiss. (1928).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume IV (XIII), № 5 (109)

MATHEMATICS

ON A CLASS OF FUNCTIONAL EQUATIONS

By L. KANTOROVIČ

(Communicated by S. N. Bernstein, Member of the Academy, 17. X. 1936)

The proofs of the existence theorems of solutions of different types of functional equations are very often based on successive approximations. In such cases, the convergence of the process generally follows from the fact that the given equation can be majorized by another equation of a simple structure. Such proofs can be found in the theory of the differential or integral equations and the theory of the infinite systems of linear equations.

The theory of operations in a semi-ordered space allows us to develop very easily and in an abstract form the complete theory of the functional equations of the above-mentioned type. This will be done in § 1 of this paper. In § 2 the general theorems of § 1 will be applied to concrete questions, especially to the theory of the infinite systems of linear equations.

§ 1. We shall begin with linear equations. Let $Y = \{y\}$ be a linear semi-ordered space (1) and f and $\bar{f}$ two regular and continuous * operations transforming Y into itself. Consider two equations:

$$y = f(y) + y_0 \tag{1}$$

$$\bar{y} = \bar{f}(\bar{y}) + \bar{y}_0. \tag{2}$$

The second of these equations we shall call «majorant» with respect to the first, if the following inequalities hold

$$|f| \leqslant \bar{f}; \quad |y_0| \leqslant \bar{y}_0. \tag{3}$$

The first of these inequalities means that

$$|f(y)| \leqslant \bar{f}(y)$$

* If the axiom VI (l. c. (1)) is fulfilled for the space Y, the continuity of the operation follows from its regularity (l. c. (2) theorem 4).

for any y. (We know—see l. c.(²), Theorem 3—that with this convention the regular operations in a semi-ordered space constitute themselves a semi-ordered space).

Theorem I (Existence theorem). If the majorant equation (2) possesses a positive solution $\bar{y}'$, then Equation (1) has a solution y^* satisfying the inequality $|y^*| \leqslant \bar{y}'$, which can be obtained by the method of successive approximations.

Proof. Define $\bar{y}_1 \cdot \bar{y}_2 \ldots$ recurrently by the formula

$$\bar{y}_n = \bar{f}(\bar{y}_{n-1}) + \bar{y}_0.$$

Then $\bar{y}_1 = \bar{f}(\bar{y}_0) + \bar{y}_0 \geqslant \bar{y}_0$ and generally (supposing $\bar{y}_{n-1} \geqslant \bar{y}_{n-2}$ to be proved)

$$\bar{y}_n = \bar{f}(\bar{y}_{n-1}) + \bar{y}_0 \geqslant \bar{f}(\bar{y}_{n-2}) + \bar{y}_0 = \bar{y}_{n-1}.$$

Besides, $\bar{y}_0 \leqslant \bar{y}_0 + \bar{f}(\bar{y}') = \bar{y}'$ and (supposing the inequality $\bar{y}_{n-1} \leqslant \bar{y}'$ to be already proved)

$$\bar{y}_n = \bar{f}(\bar{y}_{n-1}) + \bar{y}_0 \leqslant \bar{f}(\bar{y}') + \bar{y}_0 = \bar{y}'.$$

Thus, the sequence $\bar{y}_0, \bar{y}_1, \ldots$ is increasing (or at least not decreasing) and bounded. Therefore, there exists the limit $\lim_{n\to\infty} \bar{y}_n = \bar{y}^* \leqslant \bar{y}'$. Finally, this limit is a solution of Equation (2). In fact, passing to the limit in the formula

$$\bar{y}_n = \bar{f}(\bar{y}_{n-1}) + \bar{y}_0,$$

and taking into account that f is continuous, we obtain

$$\bar{y}^* = \bar{f}(\bar{y}^*) + \bar{y}_0 \quad \text{q. e. d.}$$

Returning now to Equation (1), we again define y_n inductively by the formula

$$y_n = f(y_{n-1}) + y_0.$$

Then,

$$|y_1 - y_0| = |f(y_0)| \leqslant \bar{f}(\bar{y}_0) = \bar{y}_1 - \bar{y}_0,$$

and generally we have (inductively)

$$|y_n - y_{n-1}| = |f(y_{n-1}) - f(y_{n-2})| \leqslant \bar{f}(\bar{y}_{n-1}) - \bar{f}(\bar{y}_{n-2}) = \bar{y}_n - \bar{y}_{n-1}.$$

Hence, $|y_{n+p} - y_n| \leqslant \bar{y}_{n+p} - \bar{y}_n$. Therefore, the sequence $\bar{y}_n$ being convergents, the sequence y_n converges to a limit $y^* = \lim_{n\to\infty} y_n$. It is evident, besides, that $|y^*| \leqslant \bar{y}^* \leqslant \bar{y}'$. Finally, we conclude, just as in the case of Equation (2), that $y^* = f(y^*) + y_0$, q. e. d.

These solutions obtained by the method of successive approximations we shall call principal solutions.

Remark. Theorem I and its proof remain true in the case when, instead of the inequality $|y_0| \leqslant \bar{y}_0$, we have the inequality $|y_0| \leqslant \lambda \bar{y}_0$ (λ is a real parameter). Only in its conclusion there will be also $|y^*| \leqslant \lambda \bar{y}'$.

Theorem II (Unicity theorem). If $\bar{y}^*$ is the principal solution of Equation (2), then the only solution y of (1) satisfying the inequality

$|y| \leqslant ky^*$ (where k is an arbitrary real number $\geqslant 1$) is the principal solution y^*.

Proof. Let y' be a solution of (1) satisfying the inequality $|y'| \leqslant k\bar{y}^*$. Then $y^* - y' = y$ is a solution of the homogeneous equation $f(y) = y$. Besides, $|y| = |y^* - y'| \leqslant (k+1)\bar{y}^*$. But then we have

$$|y| = |f(y)| \leqslant (k+1)\bar{f}(\bar{y}^*) = (k+1)(\bar{y}^* - \bar{y}_0);$$

$$|y| = |f(y)| \leqslant (k+1)\bar{f}(\bar{y}^* = \bar{y}_0) = (k+1)[(\bar{f}(\bar{y}^*) + y_0) - (f(\bar{y}_0) + \bar{y}_0)] = (k+1)(\bar{y}^* - \bar{y}_1)$$

and generally $|y| \leqslant (k+1)(\bar{y}^* - \bar{y}_n)$ for any n. Hence follows ($\bar{y}^*$ being the limit of $\bar{y}_n$) that $y = 0$ or, in other words, $y' = y^*$, q. e. d.

Remark. This theorem remains true if for $\bar{y}^*$ we substitute an arbitrary $\bar{y}^{**}$ such that $0 \leqslant \bar{y} \leqslant \bar{y}^{**}$ implies always $f(\bar{y}) < \bar{y}$.

Definition. We shall say that a sequence of regular operations f_n converges weakly to an operation f, denoting $f_n \dashrightarrow f$, if for every $y \in Y$ we have $\lim_{n\to\infty} f_n(y) = f(y)$.

Theorem III (on passing a limit). If a sequence of equations

$$y^s = f^s(y^s) + y_0^s \tag{4}$$

is given such that: 1) there exists an equation (2) (with a positive solution) majorant to all these equations simultaneously and 2) $f_n \dashrightarrow f$ and

$$y_0 = \lim_{s\to\infty} y_0^s,$$

then the principal solutions y^{*s} of these equations converge to the principal solution y^* of the equation (1) $f(y) = f(y) + y_0$.

Proof. If y^{*s} is the principal solution of Equation (4), then

$$y^{*s} = y_0^s + (y_1^s - y_0^s) + (y_2^s - {}^s_1) + \dots$$

In the same way,

$$\bar{y}^* = \bar{y}_0 + (\bar{y}_1 - \bar{y}_0) + \dots$$

Just as in Theorem I, we see that (for any n and s)

$$|y_n^s - y_{n-1}^s| \leqslant \bar{y}_n - \bar{y}_{n-1}.$$

Hence follows that the series $y_0^s + (y_1^s - y_0^s) + \dots$ converges uniformely (with respect to s) and, therefore, we may pass to the limit term by term. Hence,

$$\lim_{s\to\infty} y^{*s} = y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \dots = y^*, \text{ q. e. d.}$$

We shall state now some theorems concerning non-linear equations.

Theorem IV. If U is a continuous operation transforming Y into itself and monotonous between y_0 and y_1, i. e. if $y_0 \leqslant y' \leqslant y'' \leqslant y_1$ implies $U(y') \leqslant U(y'')$ and if $y_0 < U(y_0)$; $y_1 \geqslant U(y_1)$; then there exists a solution y^* $(y_0 < y^* \leqslant y_1)$ of the equation

$$U(y) = y$$

which can be arrived at by the method of successive approximations starting with y_0.

Theorem V. If 1) U and V are two continuous operations transforming Y into itself; 2) U satisfies all conditions of Theorem IV; 3) U is majorant to V, i. e. (1) $|V(y_0) - y_0| \leqslant U(y_0) - y_0$, (2) if $y_0 \leqslant y \leqslant \bar{y}$ and $\Delta y \leqslant \Delta \bar{y}$, then $|V(y - \Delta y) - V(y)| \leqslant U(\bar{y} + \Delta \bar{y}) - U(\bar{y})$; then the equation $y = V(y)$ possesses a solution which can be obtained by the method of successive approximations starting with y_0.

§ 2. Applications. 1. Infinite system of linear equations. For the beginning we consider a class of systems of linear equations a theory of which was developed by Pellet (3). For different treatments of the same equations (with some new results) see B. Koyalowitch (4), R. Kuzmin (5) and the author (6).

Consider the following systems of linear equations

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}\, x_k + b_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{1'}$$

where $\sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} = 1 - \rho_i < 1$ $(i = 1, 2, \ldots)$ and compare the system (1) with the following system

$$X_i = \sum_{k=1}^{\infty} |c_{i,k}|\, X_k + \rho_i \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{2'}$$

possessing the evident positive solution $X_i = 1$ $(i = 1, 2, \ldots)$. If Y is the semi-ordered space of all bounded sequences $\{x_k\}$ ($\{x_k\} \geqslant 0$ if $x_k \geqslant 0$ for every k), then the operation $\sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}\, x_k$ exidently transforms Y into itself. Besides, the majorant operation $\sum_{k=1}^{\infty} |c_{i,k}|\, x_k$ is positive and continuous. Therefore, we can apply all the theorems of § 1 of this paper. That gives us first of all the following (known) theorems:

Theorem I'. If $|b_i| \leqslant K \rho_i$, then the system (1') possesses a bounded solution $\{x_i^*\}$ which can be obtained by the method of succesive approximations.

Theorem II'. If $\{X_i^*\}$ is the principal solution of the system (2'), then the only solution of the system (1') of the same order as $\{X_i^*\}$, i. e. satisfying the inequality $|x_i| \leqslant k X_i^*$ $(i = 1, 2, \ldots, k$ is a constant), is the principal solution.

Further, Theorem III gives us a theorem on a possibility of passing to a limit that was stated by the author l. c. (6), p. 46. We shall consider especially a particular case of this more general theorem.

We may consider the infinite system (1) of linear equations as a limiting case of finite systems or, which is the same, of the following infinite systems

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}\, x_k + b_i, \qquad (i = 1, \ldots, N) \tag{3'}$$

$$x_i = 0. \qquad (i = N+1, N+2, \ldots).$$

All the conditions of Theorem III are satisfied and therefore its conclusion is also true; thus, we obtain the foliowing.

Theorem III′. To the system of the type (1′) the method of reduction may be applied. This means that, if x_i^N denotes the solution of the system (3′), then we have

$$x_i^* = \lim_{N\to\infty} x_i^N,$$

where x_i^* is the principal solution of (1′).

Of course, there are other ways of semi-ordering sequences $(x_1 \cdot x_2 \ldots)$. Introducing these, we obtain other semi-ordered linear spaces and other theorems on infinite systems of linear equations.

E. g. if we set $x = \{x_i\} \geqslant 0$ if and only if $x_1 \geqslant 0$ and $x_{i+1} \geqslant x_i$ for any i, then, applying to this space Theorem I, we obtain.

Theorem I″. Consider a system

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}\ x_k + b_i \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots)$$

possessing the following properties: 1) $\sum_{k=n}^{\infty} c_{i,k} \geqslant 0$ and increases (or at least does not decrease) with i for any n; 2) There exist «positive» (in the above sense) sequences $\{x_i'\}$ and $\{b_i'\}$ such that $x_i' = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}\, x_k' + b_i'$ $(i = 1,\ 2\ \ldots)$; 3) $|b_1| \leqslant b_1'$; $\sum_{i=1}^{n-1} |b_{i+1} - b_i| \leqslant b_n' - b_1'$.

Then this system possesses a solution.

Lastly, Theorems IV and V give us some theorems on non-linear systems of equations. The following theorem may serve as an example:

Theorem. Let $f_i\ (x_1 \ldots x_n)$ be functions of the variables $x_1 \ldots x_n$ increasing with these variables and such that $f\ (0 \ldots 0) = 0$ and

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} f_i\ (x,\ \ldots,\ x) = 0.$$

Then the system of equations

$$x_i = f_i\ (x_1,\ \ldots,\ x_n) + a_i \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

admits of a solution whatever be $a_i \geqslant 0$.

This theorem might be also obtained from the Brouwer's «fixpunctsatz».

In the same way, some theorems (belonging to Pellet) can be obtained concerning the systems of the form

$$x_i = b_i + \sum_{k_1=1}^{\infty} c_{k_1}^{(i)} x_{k_1} + \sum_{k_1,k_2=1}^{\infty} c_{k_1,k_2}^{(i)}\ x_{k_1}\, x_{k_2} + , \ldots \qquad (i = 1,\ 2, \ldots)$$

2. Integral equations. Consider the integral equation

$$y\ (t) = \int_a^t K\ (s,\ t)\ y\ (s)\ ds + f\ (s), \qquad (2,\ 1)$$

where $|K(s, t)| \leqslant M$, $|f(s)| \leqslant N$ and the functions $K(s, t)$ and $f(s)$ are measurable in Lebesgue's sense. Then the equation

$$y(t) = \int_a^t My(s)\, ds + N \qquad (2, 2)$$

is majorant with respect to Equation (2, 1) in the semi-ordered space of all bounded measurable functions. The principal solution of the (majorant) equation (2, 2) is here evidently $y(t) = Ne^{M(t-a)}$.

Theorems I and II of § 1 now give us the theorem that Equation (2, 1) (Volterra's equation) possesses one and only one bounded solution which may be found by the method of successive approximations. This solution will then evidently be the only integrable solution; the uniform convergence of the successive approximations for Equation (2, 1) follow from the uniform convergence of the successive approximations for the majorant equation (2, 2).

Analogous considerations may be applied to Fredholm's equations. Theorems III may be here also applied with advantage. It will give us the theorem that, if the nuclei of integral equations converge, then the solutions also converge, and the theorem that, if instead of the integral equation we take systems of algebraic equations, then the solutions of these systems will converge towards the solution of the integral equation. The first of these theorems is well known, the second may be found in the work of N. Krylof an J. Tamarkin (7).

We remark in conclusion that more general types of operations transforming a space into the same or another space might be considered. We should thus obtain existence theorems for equations more general than the integral equations.

I do not speak here of other applications of the general theorems of § 1 — to the theory of non-linear integral equations, ordinary differential equations (Picard's method), analytical theory of ordinary differential equations. In all these cases the theorems of § 1 will give us some of the known theorems and some new ones. For instance, the recent theorem of V. Niemytzki (8) may be obtained from Theorem V. I propose to treat these questions in a further work.

Leningrad University
Institute of Mathematics
and Mecanics

Received
17. X. 1936.

REFERENCES

[1] C. R. Acad. Sci. URSS, IV, p. 13 (1935); C. R., t. 202, p. 813. [2] C. R. Acad. Sci. URSS, I, p. 271 (1936). [3] P e l l e t, Bull. Soc. Mat. de France (1913). [4] Б. М. К о я л о в и ч, Труды Ин-та им. Стеклова, т. III. [5] Р. О. К у з ь м и н, ПМЕН, № 4 (1934). [6] Л. В. К а н т о р о в и ч и В. И. К р ы л о в, Методы приближенного решения уравнений в частных производных, гл. I, § 2 ОНТИ (1936). [7] М. К р ы л о в и Я. Т а м а р к и н, Бюлл. Укр. А. Н., т. I, в. 1, стр. 16—21 (1923). [8] В. В. Н е м е ц к и й, Матем. Сборн. 41, стр. 657 (1934).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume IV (XIII), № 5 (109)

MATHÉMATIQUES

SUR LES FONCTIONNELLES LINÉAIRES CONTINUES AU SENS GÉNÉRALISÉ

GR. FICHTENHOLZ

(Présenté par S. N. Bernstein, de l'Académie, le 7. VI. 1936)

§ 1. Considérons un espace quelconque linéaire $X = \{x\}$. Admettons qu'une condition (α) que nous appellerons «définition de la convergence» établit le sens de la phrase: «la suite d'éléments $\{x_n\}$ converge vers l'élément x». Si cette définition est applicable à une suite $\{x_n\}$ et un élément x, nous dirons que la suite «α-converge» vers x et nous écrirons

$$x_n \overset{\alpha}{\to} x.$$

Dans ce cas x est dit «α-limite» de la suite.

Il convient d'imposer à la définition de l'α-convergence quelques restrictions. Nous supposerons toujours que les conditions suivantes sont satisfaites:

I. si $x_n \overset{\alpha}{\to} x$ et $n_1 < n_2 \ldots n_k < \ldots$, on a $x_{n_k} \overset{\alpha}{\to} x$;

II. si, pour chaque n, $x_n \equiv x$, on a $x_n \overset{\alpha}{\to} x$;

III. si $x_n \overset{\alpha}{\to} x$, $y_n \overset{\alpha}{\to} y$, on a $x_n + y_n \overset{\alpha}{\to} x + y$;

IV. si $x_n \overset{\alpha}{\to} x$, on a $-x_n \overset{\alpha}{\to} -x$.

Nous n'avons pas fait l'hypothèse que la limite est unique (1). Pour qu'il en soit ainsi, il est d'usage de définir a priori ce que l'on doit considérer comme éléments «égaux». Nous préférons, inversement, d'établir la notion d'«égalité», en partant de la définition adoptée de la convergence. Notamment, nous dirons qu'un élément x est «α-égal» à un autre élément x', si la suite composée d'éléments x α-converge vers x'.

Il est aisé de vérifier, à l'aide des conditions I—IV que cette définition de l'égalité possède les propriétés ordinaires; elle rétablit en quelque sorte l'unicité de la limite.

Remarque. La définition de la convergence (α) jouit parfois de la propriété suivante (2):

V. Si la suite $\{x_n\}$ ne converge pas α vers x, elle contient nécessairement une suite partielle $\{x_{n_k}\}$ dont aucune suite partielle ne converge pas α vers x.

Si ce n'est pas le cas, on peut toujours, en partant de (α), construire comme il suit une définition un peu plus large, possédant la propriété ci-dessus:

(α*) $\begin{cases} \{x_n\} \text{ converge vers } x, \text{ si toute suite partielle } \{x_{n_k}\} \text{ contient, à son} \\ \text{tour, une suite partielle } \{x_{n_{k_i}}\} \text{ qui } \alpha\text{-converge vers } x. \end{cases}$

§ 2. Soit $f(x)$ une fonctionnelle, définie dans l'espace X. Nous l'appellerons linéaire, si l'on a toujours

$$f(ax + by) = a \cdot f(x) + b \cdot f(y),$$

où $x, y \in X$ et a, b sont des nombres réels.

Nous dirons qu'une fonctionnelle $f(x)$ est «α-continue», si $x_n \overset{\alpha}{\to} x$ entraîne toujours $f(x_n) \overset{\alpha}{\to} f(x)$. On suppose ici que la définition de la convergence (α) satisfait bien aux conditions I—IV (§ 1).

Signalons que la α*-continuité d'une fonctionnelle est parfaitement équivalente à la α-continuité.

A chaque définition de la convergence (α) correspond la totalité F_α de toutes les fonctionnelles $f(x)$ qui sont linéaires et α-continues. Nous dirons que la famille F_α est engendrée par la définition (α).

Inversement, soit F une famille quelconque de fonctionnelles linéaires. Ces fonctionnelles peuvent être continues dans divers sens des définitions de la convergence (α). Or, il existe toujours la plus large, définition (α_F), telle que toutes les fonctionnelles $f \in F$ sont continues dans ce sens; elle présente une espèce de «convergence faible»:

(α_F) $\begin{cases} \{x_n\} \text{ converge vers } x, \text{ si } f(x_n) \to f(x), \text{ quelle que soit la fonction-} \\ \text{nelle } f \in F. \end{cases}$

On voit que la définition (α_F) satisfait bien à toutes les conditions I—V (§ 1). Nous dirons qu'elle est engendrée par la famille F.

Il peut arriver que la définition de la convergence (α) et la famille de fonctionnelles F engendrent mutuellement l'une l'autre. En notant cette particularité, nous appellerons dans ce cas régulière la définition (α), ainsi que la famille F.

§ 3. Considérons maintenant quelques définitions de la convergence et les familles de fonctionnelles qui sont engendrées par elles.

1°. Soit M l'espace de fonctions $x = x(t)$, mesurables et bornées dans l'intervalle fini $E = [a, b]$.

Partons d'abord de la définition suivante de convergence:

(α) $\begin{cases} \{x_n\} \text{ converge vers } x, \text{ si l'on a } |x_n(t)| \leqslant K \ (n = 1, 2, 3, \ldots) \text{ et} \\ \text{si } x_n(t) \to x(t) \text{ pour toutes les valeurs de } t \in F. \end{cases}$

Dans ce cas, les fonctions identiques seulement sont α-égales.

La définition (α) *engendre la famille de fonctionnelles, exprimées par l'intégrale de Radon*:

$$f(x) = \int_E x(t)\, \Phi(dE), \tag{1}$$

où $\Phi(e)$ *est une fonction quelconque, bornée et absolument additive d'un ensemble mesurable* $e \subset E$.

La définition (α) est régulière; en d'autre termes, lorsque, pour une suite $\{x_n\}$, on a

$$f(x_n) \to f(x),$$

quelle que soit la fonctionnelle f de la forme (1), on a nécessairement

$$x_n \overset{\alpha}{\to} x.$$

La même conclusion subsiste, si l'on part de la famille beaucoup plus étroite F_0 de fonctionnelles de la forme

$$f_0(x) = \sum_j c_j \cdot x(\tau_j),$$

où $\{\tau_j\}$ est un ensemble fini ou dénombrable quelconque de valeurs de t et $\{c_j\}$ est une suite de constantes, telle que

$$\sum_j |c_j| < +\infty.$$

[Il leur correspond dans (1) les fonctions de forme particulière:

$$\Phi(e) = \sum_{\tau_j \in e} c_j\Big].$$

Donc, la famille $F_0 = \{f_0\}$ nous donne un exemple d'une famille qui n'est pas régulière.

2°. Prenons ensuite, pour le même espace M, une autre définition de la convergence:

(β) $\begin{cases} \{x_n\} \text{ converge vers } x, \text{ si l'on a } |x_n(t)| \leqslant K \ (n = 1, 2, 3, \ldots) \text{ et si} \\ x_n(t) \to x(t) \text{ presque partout dans } E. \end{cases}$

Ce sont des fonctions équivalentes (c'est-à-dire, ne différant que dans un ensemble de mesure nulle au plus) qu'il faut appeler β-égales.

La définition (β) *engendre la famille de fonctionnelles, exprimées par l'intégrale de Lebesgue:*

$$f(x) = \int_a^b x(t) \cdot \varphi(t)\, dt, \tag{2}$$

où $\varphi(t)$ *est une fonction quelconque, sommable dans l'intervalle* $[a, b]$.

La même famille est engendrée par la définition de convergence (β*) qu'on peut formuler ainsi:

(β*) $\begin{cases} \{x_n\} \text{ converge vers } x, \text{ si l'on a } |x_n(t)| \leqslant K \ (n = 1, 2, 3, \ldots) \\ \text{presque partout dans } E \text{ et si } x_n(t) \text{ tend en mesure vers} \\ x(t) \text{ dans } E. \end{cases}$

Cette définition n'est pas régulière. La définition de la convergence engendrée par la famille (2), a été formulée par M. Lebesgue [3].

3°. Passons à l'espace V de fonctions $x = x(t)$ à variation bornée dans l'intervalle $[a, b]$.

Nous partons l'abord de la définition:

(γ) $\begin{cases} \{x_n\} \text{ converge vers } x, \text{ si Var } x_n(t) \leqslant L \ (n = 1, 2, 3, \ldots) \text{ et si} \\ x_n(t) \to x(t) \text{ dans } [a, b], \text{ abstraction faite d'un ensemble dénombrable au plus de valeurs de } t, \text{ comprises dans l'intérieur de} \\ \text{l'intervalle } [a, b]. \end{cases}$

Nous appelons ici γ-égales des fonctions qui ne diffèrent que dans un ensemble dénombrable au plus de points intérieurs à l'intervalle $[a, b]$.

La définition (γ) *engendre la famille de fonctionnelles, exprimées par l'intégrale de Stieltjes:*

$$f(x) = \overset{b}{\underset{a}{S}} \varphi(t)\, dx(t) + c \cdot x(a), \tag{3}$$

où $\varphi(t)$ *est une fonction continue arbitraire dans l'intervalle* $[a, b]$ *et* c *est une constante quelconque.*

La définition (γ) n'est par régulière. La convergence, engendrée par la famille de fonctionnelles (3), a été considérée obtenu dans diverses formes [4].

4°. Enfin, considérons la définition de la convergence:

(δ) $\begin{cases} \{x_n\} \text{ converge vers } x, \text{ si Var } x_n(t) \leqslant L \ (n = 1, 2, 3, \ldots) \text{ et que} \\ x_n(t) \rightarrow x(t) \text{ dans tout l'intervalle } [a, b]. \end{cases}$

Comme dans le cas 1°, «δ-égales» veut dire «identiques».

La convergence (δ) *engendre la famille de fonctionnelles, exprimées par l'intégrale généralisée* [5] *de Stieltjes*:

$$f(x) = \overset{b}{\underset{a}{S}} \psi(t)\, dx(t) + c \cdot x(a), \qquad (4)$$

où $\psi(t)$ *est une fonction arbitraire bornée n'ayant que des discontinuités de la première espèce à l'intérieur de l'intervalle* $[a, b]$.

La démonstration est basée sur les propriétés de l'intégrale généralisée de Stieltjes que j'ai indiquées dans ma Note précédente [5].

Remarquons seulement que la fonction $\psi(t)$ admet des sauts exactement aux points $t = \tau$ $(a < \tau < b)$, pour lesquels on a $f(x_\tau) \neq 0$, où l'on pose

$$x_\tau(t) = \begin{cases} 1, \text{ si } t = \tau, \\ 0, \text{ si } t \neq \tau. \end{cases}$$

L'ensemble des valeurs semblables de τ peut être au plus dénombrable. Le nombre $f(x_\tau)$, changé de signe, donne précisément le saut de la fonction $\psi(t)$ pour $t = \tau$.

La définition (δ) est régulière.

§ 4. La théorie ordinaire des fonctionnelles linéaires rattache leur continuité à la convergence des éléments «par la norme». Cependant, parfois, quelque naturelle que soit la définition de la norme, cette convergence se trouve peu conforme aux propriétés particulières de l'espace. P. e., bien que dans l'espace M il paraît assez naturel de prendre pour norme:

$$\| x \| = \sup_{a \leqslant t \leqslant b} | x(t) |,$$

il n'est pas naturel de se borner à la considération de la convergence uniforme qui s'y rattache et laisser de côté la convergence importante (β) ou (β^*).

On peut encore traiter la question d'un autre point de vue. La convergence dans l'espace considéré permet en quelque sorte de caractériser la famille engendrée de fonctionnelles. Dans notre exemple, la famille importante de fonctionnelles (2) dans l'espace M, peut être regardée comme caractérisée par la convergence (β) ou (β^*). En même temps, comme je prouverai dans ma Note suivante, cette famille ne peut en général être engendrée par aucune convergence «par la norme».

Tout cela justifie bien la considération des fonctionnelles linéaires, continues au sens généralisé.

Université de Léningrad
Institut de Mathématiques et de Mécanique.

Manuscrit reçu le
7. VI. 1936.

LITÈRATURE CITÉE

[1] Av. C. Kuratowski, Topologie I, p. 83, Warszawa-Lwow (1933). [2] P. Alexandroff et P. Urysohn, C. R., t. 177, p. 1274 (1923); P. Urysohn, Ens. Math., 25, pp. 77—83, (1926). [3] H. Lebesgue, Annales de Toulouse, sér. 3, t. 1, p. 52 (1903.). [4] F. Riesz, C. R., t. 149, p. 977 (1909); cf. aussi Gr. Fichtenholz, Bull. Acad. Belgique, t. XXII, p. 28 (1936). [5] Gr. Fichtenholz, C. R. Acad. Sci. URSS, vol. III, № 3 (1936).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume IV (XIII), № 5 (109)

PHYSIK

ÜBER DIE UNMÖGLICHKEIT EINER NEUTRINOTHEORIE DES LICHTES

Von V. FOCK, korrespondierendem Mitglied der Akademie

1. Widersprüche zwischen der Neutrinotheorie des Lichtes und dem Superpositionsprinzip

Die Grundlage der Neutrinotheorie des Lichtes bildet die Vorstellung, dass das Lichtfeld (quantisierte Wellenfunktion F) als eine Auswirkung eines Neutrinofeldes (quantisierte Wellenfunktion ψ) betrachtet werden kann. Diese Idee muss—falls sie richtig ist—in Form einer Beziehung zwischen F und ψ formuliert werden können. Die Funktionen F und ψ sind aber durchaus nicht willkürlich. Zur Entscheidung der Frage, ob die eine von ihnen durch die andere ausgedrückt werden kann, ist daher vor allem klarzustellen, ob die Eigenschaften dieser Funktionen eine Beziehung zwischen ihnen zulassen.

Wir wissen zunächst, dass für die Neutrinos die Fermistatistik und für die Photonen die Bosestatistik gilt. Die Funktionen F und ψ müssen daher bestimmten Vertauschungsrelationen genügen. Betrachtet man ferner F und ψ als Funktionen der Koordinaten und der Zeit, so müssen sie gewisse Differentialgleichungen befriedigen, damit zwischen Energie und Impuls eines Teilchens (sowohl eines Lichtquants, als auch eines Neutrinos) die nötige Beziehung besteht. Für die Lichtquanten ist dies die d'Alembertsche Gleichung; für die Neutrinos—entweder die d'Alembertsche Gleichung oder (falls die Masse eines Neutrinos als von Null verschieden angenommen wird) eine analoge Gleichung mit einem Massenglied. Dass die durch F und ψ befriedigten Differentialgleichungen linear sein müssen, folgt einfach daraus, dass auch für die quantisierten Wellenfunktionen das Superpositionsprinzip gilt. Für die quantisierten Wellenfunktionen bedeutet dieses Prinzip vor allem die Möglichkeit, die Zustände der Teilchen nach den Methoden der Theorie der linearen Operatoren zu klassifizieren und solche Fälle zu betrachten, wo die Anzahl der Teilchen in einem gegebenen Zustand unbestimmt bleibt. Formal kommt die Gültigkeit des Superpositionsprinzips dadurch zum Ausdruck, dass die quantisierten Wellenfunktionen in Form von Fourierintegralen oder Fourierreihen geschrieben werden und dass auf sie die quantenmechanische Theorie der kanonischen Transformationen angewandt wird.

Wir kommen somit zum folgenden Schluss:

I. *Beide quntisierte Wellenfunktionen, F und ψ genügen linearen Wellengleichungen und für beide muss das Superpositionsprinzip gelten.*

Aus der Verschiedenheit der Statistik für die Lichtquanten und für die Neutrinos folgt ferner:

II. *Die Beziehung zwishen F und ψ kann nicht linear sein.*

Aus diesen beiden Grundtatsachen folgt aber bereits die Unmöglichkeit irgendeiner Beziehung zwischen F und ψ, d. h. die Unmöglichkeit einer Neutrinotheorie des Lichtes. In der Tat kann das Superpositionsprinzip unmöglich für beide Funktionen F und ψ simultan gelten, wenn zwischen ihnen eine nicht-lineare Beziehung besteht. Eine Einschränkung des Neutrinofeldes auf Wellen streng bestimmter Richtung [$\psi = \psi(x - ct)$] würde zwar eine Konstruktion nicht-linearer Ausdrücke in ψ ermöglichen, die der d'Alembertschen Gleichung genügen, würde aber einen Verzicht auf das Superpositionsprinzip bedeuten, was aus allgemeinen, soeben erörterten Gründen abzulehnen ist.

2. Die Unmöglichkeit einer Konstruktion der Boseschen quantisierten Amplituden aus den Fermischen

Die obigen, das Superpositionsprinzip wesentlich heranziehenden Betrachtungen genügen bereits, um die Unmöglichkeit einer Neutrinotheorie des Lichtes festzustellen. In nicht minder überzeugender Weise folgt aber dieses Ergebnis auch daraus, dass es unmöglich ist, eine solche Beziehung zwischen F und ψ zu finden, dass die nötigen Vertauschungsrelationen befriedigt werden. Schreibt man F und ψ in Form von Fourierintegralen

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu x} b(\nu)\, d\nu; \quad \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu x} \gamma(\nu)\, d\nu \tag{1}$$

so sind die Vertauschungsrelationen für F und für ψ mit den folgenden Relationen für deren Amplituden $b(\nu)$ und $\gamma(\nu)$ gleichbedeutend:

$$\left.\begin{aligned} b(\nu)\, b^+(\mu) - b^+(\mu)\, b(\nu) &= \delta(\mu - \nu) \\ b(\nu)\, b\ (\mu) - b\ (\mu)\, b(\nu) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \gamma(\nu)\, \gamma^+(\mu) + \gamma^+(\mu)\, \gamma(\nu) &= \delta(\mu - \nu) \\ \gamma(\nu)\, \gamma\ (\mu) + \gamma\ (\mu)\, \gamma(\nu) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Für alle Probleme der Quantenmechanik is es charakteristisch, dass das kontinuierliche Energiespektrum als Grenzfall eines diskreten Spektrums betrachtet werden kann, und dass es genügt, in diesem letzteren eine hinreichend grosse, jedoch endliche Anzahl von Eigenwerten zu betrachten (Wäre es nämlich anders, so würde unsere Unwissenheit der Eigenschaften sehr energiereicher Teilchen, mit Energien von etwa Hundert Millionen Volt, nicht nur die tatsächlich vorhandene Unmöglichkeit der Berechnung höherer Näherungen in der Quantenelektrodynamik bedeuten, sondern auch die einfachsten Anwendungen dieser Theorie unmöglich machen, was nicht der Fall ist). Da in unseren Formeln die Grösse ν die Bedeutung einer Frequenz oder einer Energie hat, so dürfen wir auch hier annehmen, dass sie nur eine endliche Anzahl diskreter Werte $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_N$ annimmt. In diesem Fall sind aber die den $\gamma(\nu)$ analogen Amplituden γ_k endliche Matrizen, während die entsprechenden b_k (auch schon für $N = 1$) unendliche Matrizen sind. Da nun eine beliebige Funktion von endlichen Matrizen wieder eine endliche Matrix ist, folgt daraus dieUnmöglichkeit, die b_k durch die γ_k auszudrücken. Das bedeutet aber, dass die Eigenschaften des Lichtfeldes auf die des Neutrinofeldes nicht zurückführbar sind.

3. Widerlegung der gegenwärtigen Neutrinotheorie des Lichtes

Wir haben oben zu zeigen versucht, dass es überhaupt unmöglich ist, eine Neutrinotheorie des Lichtes aufzubauen. Was die Widerlegung der Theorie in deren gegenwärtigen Form betrifft, so ist dies eine viel leichtere Aufgabe.

Die Ausgangsformel, welche nach Jordan «das eigentliche Fundament der Neutrinotheorie des Lichtes» bildet, ist der folgende Ausdruck* für $b(\nu)$ durch $\gamma(\alpha)$:

$$\sqrt{|\nu|}\, b(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma^{+}(\alpha)\, \gamma(\nu + \alpha)\, d\alpha \qquad \text{(Jordan)}. \tag{4}$$

Das Integral rechts ist der «quantisierte» Operator $\mathbf{L}(\nu)$ dem ein «unquantisierter» Operator $L(\nu)$ entspricht, welcher (in der betrachteten Darstellung) die Bedeutung: «Vergrösserung des Argumentes α um den Wert ν» hat. Der Operator $L(\mu)$, sowie der zu ihm adjungierte Operator $L^{+}(\mu) = L(-\mu)$ ist offenbar für alle Werte von μ und ν mit $L(\nu)$ vertauschbar. Nach einem bekannten Satz der Theorie der zweiten Quantelung folgt aber aus der Vertauschbarkeit zweier «unquantisierten» Operatoren die Vertauschbarkeit der entsprechenden «quantisierten» Operatoren. Das bedeutet aber, dass die durch (4) definierten Operatoren $b(\nu)$ die Vertauschungsrelationen (2) nicht erfüllen, sondern miteinander und mit den adjungierten Operatoren vertauschbar sind. Dadurch wird die Formel (4) und somit auch die ganze Theorie widerlegt.

Dass Jordan für die Operatoren (4) andere Vertauschungsrelationen gefunden hat, ist offenbar auf einen Fehler in seiner Beweismethode zurückzuführen; in der Tat enthalten die von ihm betrachteten Ausdrücke Unbestimmtheiten von der Form $\infty - \infty$.

Lebedewsches Physikalisches Institut
der Akademie der Wissenschaften

Eingegangen
d. 11. XI. 1936.

ZITIERTE LITERATUR

[1] L. de Broglie, C. R. Paris, **198**, 135 (1934). [2] P. Jordan, ZS. f. Phys. **93**, 464 (1935). [3] O. Scherzer, ZS. f. Phys. **97**, 725 (1935). [4], [5], [6] R. de L. Kronig, Physica, **2**, 491, 854, 965 (1935). [7] P. Jordan, ZS. f. Phys., **99**, 109 (1936). [8] P. Jordan, Lichtquant und Neutrino I,—ZS. f. Phys., **98**, 759 (1936). [9] P. Jordan und R. de L. Kronig, ZS. f. Phys., **100**, 569 (1936). [10] D. Iwanenko und A. Sokolow, Sow. Phys., **9**, 692 (1936). [11] P. Jordan, ZS. f. Phys., **102**, 243 (1936). [12] P. Jordan, Anschauliche Quantentheorie, Berlin, Springer, S. 269 (1936). [13] R. de L. Kronig, Nature, 137, 149 (1936).

* Wie entnehmen diese Formel dem Jordanschen Buch ([12]); in seinem Artikel ([2]) wird diese Formel in etwas anderer Form geschrieben, die jedoch mit (4) äquivalent ist.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume IV (XIII), № 5 (109)

ZOOLOGY

THE SAND-EEL OF NOVAYA ZEMLYA (*AMMODYTES MARINUS* RAITT)

By F. N. KIRILLOV

(Communicated by S. A. Zernov, Member of the Academy, 7. IX. 1936)

The expedition undertaken by the Archangel Station of the All-Union Research Institute of Marine Fishery and Oceanography in the autumn 1935 encountered sand-eels along the western coast of Novaya Zemlya within the range from 72° 40′ to 71°32′ N. lat. and from 52°43′ to 52° 15′ E. long. Large amounts of sand-eels occurred in the Srednyaya (Middle) and Dolgaya (Long) bays and in the Rogachov gulf.

It is of much importance to establish to what species the sand-eel of Novaya Zemlya belongs. It must be born in mind that the presence of *Ammodytes marinus* Raitt has but recently been indicated by Duncker and Mohr (1) for the Murman coast. Furthermore, sand-eels from the shore of Murman described by Suvorov and his collaborators and assumed to be *Ammodytes tobianus* proved to belong to *Ammodytes marinus* (s. below).

For a detailed biometric analysis I took 100 speciemens of the sand-eel of Novaya Zemlya having the absolute length of 68—110 mm (the body length of 63—107 mm). In Pevzner's (4) as well as Suvorov and his collaborators' works it has been established that the sand-eel has no sexual dimorphism; therefore, our material was not grouped according to sex.

The results of the biometrical analysis may be presented as in the Table 1.

Comparing the biometric data obtained by us with those of Raitt(2) for the sand-eels of Scottish waters we conclude from Table 2 that the Novaya Zemlya sand-eel is not related to *A. tobianus;* it is very near to *A. marinus* and is distinguished from the *Ammodytes* of the Murman coast by a number of characters.

From Table 1 it will be seen that out of 16 characters but 3 (2 plastic and 1 meristic) have no real difference, the rest having not merely a real but even a large difference.

So we are led to the conclusion that in shore of Novaya Zemlya there occur sand-eels, being taxonomically an independent form separated from the Murman one: both forms are most closely related to *A. marinus* and markedly differ from *A. tobianus*, with wich the Murman species was formerly confounded.

Table 1

	In % of absolute length	Sand-eel of Novaya Zemlya			Sand-eel of Murman			M diff.
		$M \pm m$	σ	n	$M \pm m$	σ	n	
1	Body length	91.93±0.04	0.42	100	92.6 ±0.07	0.8	106	7.04
	In % of body length							
2	Length of head	21.3 ±0.09	0.96	100	19.7±0.08	0.9	106	10.90
3	Ante-dorsal distance	28.3 ±0.12	1.22	100	27.3±0.12	1.26	106	6.10
4	Ante-anal distance	64.7 ±0.11	1.16	100	64.3±0.11	1.20	106	2.19
5	Length of pectoral fin	10.2 ±0.07	0.67	100	9.1±0.06	0.62	106	12.66
6	Maximum depth of body	8.4 ±0.06	0.60	100	10.1±0.07	0.78	106	18.00
7	Minimum depth of body	2.6 ±0.02	0.22	100	2.7±0.05	0.58	106	1.01
	In % of head length							
8	Depth of head	36.2 ±0.17	1.73	100	31.1±0.21	2.24	106	11.32
9	Length of snout	34.8 ±0.19	1.19	100	33.4±0.11	1.11	100	6.42
10	Length of lower jaw	43.1 ±0.22	2.17	100	33.0±0.22	2.67	106	17.73
11	Diameter of eye	17.3 ±0.12	1.17	100	14.3±0.12	1.28	106	9.93
12	Postorbital space	48.8 ±0.18	1.83	100	51.9±0.25	2.64	106	29.56
	Meristic characters							
13	Number of vertebrae	70.9 ±0.13	1.33	100	71.3±0.08	0.87	121	2.40
14	Number of dorsal fin rays	60.5 ±0.12	1.16	100	61.9±0.09	1.01	106	4.03
15	Number of pectoral fin rays	14.2 ±0.06	0.58	100	12.5±0.05	0.59	106	22.07
16	Number of anal fin rays	31.1 ±0.12	1.22	100	31.6±0.06	0.64	106	9.45

Table 2

	Number of			
	vertebrae	rays in D	rays in A	rays in P
A. tobianus(Scotland)	63.4	53.4	28.0	12.1
A. marinus (Scotland)	69.2	59.1	36.6	13.1
Sand-eel of Novaya Zemlya	70.9	60.5	31.1	14.2

The approaches of the sand-eel of Novaya Zemlya seem to begin from the middle of July. By that time the littoral areas will entirely have been cleared of ice and the intermixing water layers will nearly have levelled the temperatures both on the surface and at the bottom, the direct stratification being substituted for the inverse one. It is the eve of the hydrological summer or the beginning of the last quarter of the hydrological spring. For its approaches, the sand-eel of Novaya Zemlya chooses moderately deep places with a clear sandy bottom, but at the same time it does not avoid muddy grounds grown with *Utricularia* and sandy-stony grounds grown with *Laminaria*.

Comparing the mean linear sizes of Murman and Novaya Zemlya sand-eels according to age we obtain a striking difference:

Age	Novaya Zemlya sand-eels in mm Catch of 1935	Murman sand-eels in mm Catch of 1927
0+	64	95
1+	75	116
2+	81	135
3+	94	159
4+	104	166

From Table 3 will be seen that the sand-eel of Novaya Zemlya greatly lags behind that of Murman in growth, the third age group of the Novaya Zemlya sand-eel being nearly equal to the zero group of the Murman sand-eel in linear size. This lagging behind in growth is to be accounted for by both biological and taxonomic differences of either group.

The sexual ripennes of the Novaya Zemlya sand-eel comes from the age 3+. The spawning takes place but in winter, which is indicated by the presence of: 1) the fry in catches (the zero group), 2) the females in the 4th stage of maturity on October 10. The absence of the breed of the last summer speaks for the lack of the summer spawning neer the shores of Novaya Zemlya.

The absolute fecundity of the Novaya Zemlya sand-eels is by far lower than that of the Murman ones: at the absolute length of 120 mm we have the average fecundity for 2 specimens of Murman sand-eel 4352, while the fecundity of 4 specimens of Novaya Zemlya sand-eel of the same length averaged 2563.

Chair of Ychtyology
State University of Perm.

Received
7. IX. 1936.

REFERENCES

[1] Duncker u. E. Mohr, Zool. Anz., **110**, H. 7/8 (1935). [2] D. S. Raitt, Journ. du Conseil, IX, 3 (1934). [3] Е. Суворов, Л. Вадова и А. Сынкова, Труды Ленинградск. н.-и. ихтиологич. ин-та, II (1931). [4] В. Невзнер, Труды гос. океанографич. ин-та, IV, вып. 1 (1933).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume IV (XIII), № 5 (109)

EMBRYOLOGIE

ÜBER DIE SPÄTE POSTEMBRYONALE ENTWICKLUNG DES FROSTSPANNERS *(OPEROPHTHERA BRUMATA* L.*)*

Von D. M. FEDOTOV

(Vorgelegt von S. A. Zernov, Mitglied der Akademie, d. 22. VI. 1936)

Der vorliegende Artikel enthählt eine kurze Darlegung der Beobachtungen über die späte postembryonale Entwicklung (Pup-Stadium) des Frostspanners *Operophthera brumata* L. Das Stadium der embryonalen und postembryonalen Entwicklung dieser Form bildet einen Teil der Arbeit, die von den Mitarbeitern des Instituts für Evolutionsmorphologie und Paläozoologie der Akademie der Wissenschaften der UdSSR ausgeführt wird, um die Gesetzmässigkeiten der Evolution der ontogenetischen Entwicklung und der Ökologie des Frostspanners aufzuklären, der sich als ein ernster Schädling der grünen Anpflanzungen in den Städten und der Obstbäume verschiedener Gebiete unserer Union erweist. In der Arbeit ist die Aufmerksamkeit hauptsächlich auf die Entwicklung der Flügel im Puppenstadium gerichtet, die bei den erwachsenen Weibchen reduziert sind. Die ontogenetische Entwicklung der Flügel wurde bei den Schmetterlingen mit Mikropterismus und Apterismus bis jetzt noch nicht studiert.

Wenn der Frostspanner im Laboratorium gezüchtet wird, erscheinen die Kokons Ende Mai und Anfang Juni und die ersten Puppen gegen Ende des ersten Drittels des Monats Juni. Das Puppenstadium dauert etwas länger als vier Monate. Das Ausschlüpfen der Schmetterlinge beginnt von zehnten Oktober und endet Mitte November. Die Puppen wurden von der Zeit des Verpuppens an alle 5—6 Tagen hauptsächlich mit der Petrunkewič'schen Flüssigkeit (1933) fixiert, und an Schnittserien studiert. Äusserlich unterscheiden sich die Puppen der Männchen und der Weibchen fast gar nicht von einander, ihre Flügelscheiden sind ähnlich.

Bei jungen, eben erst verwandelten Puppen sind Ober- und Unterseitepithel der Flügelanlagen durch stark ausgedehnte, gespannte Zelle gebildet. Die Spannung der Epithelzellen ist auch in den Gliedmassenanlagen des Kopfes und des Thorax ausgeprägt. Ein deutliches Hypoderm unter dem Chitin bedeckt auch die ganze Oberfläche der Puppe. Der Darm, das Nerven- und Zirkulationssystem, das Muskel- Fett- und andere Gewebe behalten die Merkmale der Raupe.

Bald nach dem Verpuppen beginnen die Zerstörungsprozesse der Organe der Raupe; sie herrschen in den ersten anderthalb Monaten des Puppenstadiums vor. Das Hypoderm verliert die sichtbaren Zellengrenzen. Die Flügel-

und Gliedmassenanlagen des Kopfes und des Thorax verwandeln sich bei Männchen und Weibchen in die aus flüssiger plasmatischer Masse mit Blutlakunen und Tracheenanlagen bestehenden Säcke, die mit einer geschichteten Reihe von Kernen bekleidet sind. Anfangs füllen sie die Hüllen und lösen sich von ihrem Chitin allmählich los. Die Grenzen der Epithelialzellen aller dieser Anlagen können durch die gewöhnliche Methoden nicht festgestellt werden. Es gibt keinen Unterschied zwischen den Männchen und den Weibchen in den Flügelanlagen. Sie füllen vollständig ihre Chitinscheiden aus, aber bei den Weibchen sind sie etwas kleiner. Im grossen und ganzen ist kein Unterschied in der Entwicklung der Männchen und der Weibchen in dieser Entwicklungsperiode der Puppe.

Von der Mitte des zweiten Monats des Puppenlebens (Mitte Juli) an, besonders aber am Ende des zweiten Monats beginnen die Prozesse der Histogenese und der Organogenese sich merklich zu verstärken: dabei eilt die Entwicklung des Männchens der des Weibchens etwas voraus. Bei den Männchen beginnt die Differenzierung des Epithels der Anlagen der Flügel und der Kopf- und Thoraxgliedmassen. Die Flügelanlagen bei den Puppen der Männchen bekommen wieder einen deutlichen Zellenbau; wahrscheinlich findet eine Teilung der Kerne statt. Die Flügelanlagen werden dünner und erst glatt. Die Mutterzellen der Schüppchen beginnen sich zu differenzieren. In den Gliedmassenanlagen des Kopfes und der Brust verstärkt sich die Histogenese der Muskeln, der Nerven und der Tracheen. Im allgemeinen verläuft die Entwicklung der Puppe bei den Weibchen ebenso, aber sie bleibt etwas hinter der Entwicklung des Männchens zurück. Nur die Entwicklung der Flügelanlagen des Weibchens wird sehr verzögert: sie nehmen wie bisher die ganze Länge der Chitinscheide ein und behalten den Charakter noch nicht differenzierter Anlagen.

In der zweiten Hälfte des dritten Monats des Puppenlebens (Mitte August) eilt die allgemeine Entwicklung des Männchens noch mehr der des Weibchens voraus. Die Flügel des Männchens sind schon stark gefaltet und mit feinem Chitin und zahlreichen Schüppchen bedeckt. Die Muskeln der Brust- und der Kopf- und Thoraxgliedmassen sind stark differenziert. Zu dieser Zeit wird die Reduktion der Mundorgane deutlich; so nimmt der Rüssel, dessen Anlage lange Zeit die ganze Chitinscheide ausgefüllt hat, jetzt nur einen unbedeutenden Teil desselben ein. Die Entwicklung des Darmes schreitet stark fort; Kropf und Blinddarm bilden sich; es wird die Reduktion der Speiseröhre merklich. Das Fettgewebe ist stark hystolisiert, seine Quantität hat sich vermindert. Frühe Spermatogenese in den Hoden und auch eine bedeutende Entwicklung der Nebengeschlechtsdrüsen und der Geschlechtsgänge sind festzustellen.

Dieselben Prozesse finden in der Entwicklung der Puppe des Weibchens statt, aber sie haben ein langsameres Tempo. Der Unterschied zwischen der Entwicklung der Männchen und der Weibchen wird schärfer. In der Mitte des dritten Monats des Puppenlebens findet die endgültige Reduktion der Flügelanlagen des Weibchens statt. Der Flügel des Weibchens nimmt jetzt nur einen kleineren Teil der Chitinscheide ein, er wird allmählich faltig und mit Schüppchen bedeckt. Die Reduktion der Flügelanlage der Puppe und die Bildung des reduzierten imaginalen Flügels des Weibchens treffen der Zeit nach mit den Veränderungen zusammen, welche in den Eierstockanlagen geschehen und darin bestehen, dass zwei sackartige Eierstockanlagen, ihre Umhüllung verlierend, in einzelne Eiröhrchen zerfallen, die allmählich die Bauchsegmente der Puppe ausfüllen. Auch die Mundorgane erleiden eine Reduktion. Die Entwicklung des Kropfes und des Blinddarms werden angedeu-

tet. Die unvollkommene Entwicklung der Brustmuskulatur wird bemerkbar. Jedoch bleibt der Fettkörper in noch grösserer Quantität erhalten.

Von der zweiten Hälfte des dritten Monats bis zum Ausschlüpfen des Schmetterlings (Mitte September—Mitte Oktober) dauert die forcierte Formierung der imaginalen Organe der Männchen und Weibchen. Als Ergebnis der Entwicklung entsteht ein Männchen mit normal entwickelten Flügeln, mit einer mächtigen Muskulatur, die die ganze Brust einnimmt, mit einem, dünnen, mit dünnen Wänden versehenen, hohlen Abdomen, das den Kropf und den Blinddarm, die mit einer zusammengeronnenen Masse gefüllt sind, ferner Hoden und eine geringe Quantität des Fettkörpers enthält. Das Weibchen hat reduzierte Flügel ohne Flugfunktion, eine schwach entwickelte Brustmuskulatur, ein umfangreiches Abdomen, das von Eiröhren, einem kleinen Fettkörper und einem zusammengedrückten Darm ausgefüllt ist, der ungefähr denselben Charakter zeigt, wie bei dem Männchen. Über die Morphologie der erwachsenen Formen des Frostspanners siehe die Mitteilung von A. A. Machotin [C. R. Acad. Sci. URSS, vol. II, № 9 (1936)].

Das Studium der Puppenentwicklung des Frostspanners erlaubt das Vorhandensein eines regelmässigen Rhythmus von aufeinander folgenden Phasen in der Ontogenie der Insekten zu behaupten, der zuerst von Buddenbrock (1930) und Köhler (1931) und dann von Hundertmark (1935) festgestellt worden ist. Wie es scheint, kann mann im Puppenstadium des Frostspanners ebenso wie (nach den Ergebnissen von Hundertmark) für die Ontogenie des Mehlkäfers (*Tenebrio molitor*) gleich nach dem Verpuppen eine Beharrungsphase feststellen, dann eine Chitinablösungsphase und eine Zellteilungsphase (während der ersten anderthalb Monate des Puppenlebens), eine Streckungsphase (Ende des zweiten Monats), eine Faltungsphase (Hälfte des dritten Monats) und eine Chitinbildungsphase. Die Ergebnisse der Untersuchung der spätern postembryonalen Entwicklung des Frostspanners bestätigen den Grundsatz von Köhler und Hundertmark, dass die Periode der Insektenentwicklung von einer Häutung bis zur anderen keine einfache, sondern eine komplizierte, aus mehreren Phasen bestehende Entwicklungsetappe ist.

Die betreffenden Ergebnisse der postembryonalen Entwicklung des Frostspanners sind für die Frage der Reduktion der Organe von Bedeutung. Nach A. N. Sewertzoff nimmt die Reduktion entweder den Weg der Rudimentation, wo die Organanlage von den ersten Entwicklungsstadien an verkleinert erscheint, wobei sich ein verkleinertes und vereinfachtes Organrudiment ergibt, oder den Weg der Aphanysie, wobei die embryonale Entwicklung normal bis zu einem gewissen Stadium verläuft, nach welchem dann die Verkleinerung der Organanlage beginnt, die zu ihrem vollen Verschwinden führt. Wie Medwedev festgestellt hat (1935), entspricht die von ihm festgestellte Verkleinerung der Imaginalscheiben der Augen unter dem Einfluss der Reduktoren-Gene bei einigen Mutationen der Drosophilla dem Prinzip der Rudimentation. Der Modus der Flügelreduktion bei dem Weibchen des Frostspanners nimmt eine der Mittelstellung zwischen dem Prinzip der Rudimentation und dem der Aphanysie ein. Obgleich die Flügelanlage des Weibchens im Vergleich mit der des Männchens etwas verkleinert ist, verläuft die Entwicklung doch normal bis zu einem sehr späten Stadium, wo eine starke Verkleinerung der Anlage stattfindet. Das Verschwinden des Organs findet nicht statt, es bildet sich ein verkümmerter und vereinfachter Flügel, der seine Flugfunktion verloren, aber sehr wahrscheinlich eine gewisse Bedeutung für den Organismus bewahrt hat.

Eine ganze Reihe von Forschern (siehe die Arbeiten von Dewitz, 1902—1920, von Schull, 1926—1930, von Kusnetzov, 1929) hat sich mit der Frage über

den Mikropterismus des Frostspanners und mit den Gründen des Apterismus bei den Insekten im allgemeinen beschäftigt. Die Versuche, den Apterismus nur durch physiologische Ursachen, z. B. durch die Veränderungen des inneren Oxydationsprozesses (Dewitz) zu erklären, sind misslungen und durch weitere Erfahrungen nicht bestätigt worden (Finkenbrink, 1932). Der Mikropterismus der Weibchen des Frostspanners ist, wie jede erbliche Veränderung der ontogenetischen Entwicklung, selbstverständlich mit den entsprechenden Genen verbunden, und der Prozess der Flügelreduktion bei dieser Form erscheint im wesentlichen als eine Realisation der Genen in Merkmalen der erwachsenen Form. Es ist kein Zufall, dass der Moment der Flügelreduktion bei den Weibchen mit dem Moment des Verwandlung der Eierstockanlage in Eiröhen zusammentrifft. Jedoch weist das Auftreten des Mikropterismus und des Apterismus fast ausschliesslich bei den Spätherbst- und Winterformen auf einen Zusammenhang zwischen ihnen und der Ökologie, der Geschichte der Entstehung und der Verbreitung solcher Formen hin. Der Mikropterismus bei dem Frostspanner hat direkt oder indirekt eine Anpassungsbedeutung und es gelingt das Erscheinen dieses Kennzeichens bei der gegebenen Form nur unter Mitwirkung der natürlichen Auslese zu erklären.

Institut für Evolutionsmorphologie
und Paläozoologie.
Akademie der Wissenschaften der UdSSR
Moskau.

Eingegangen
d. 22. VI. 1936.

PRIX D'ABONNEMENT

Un an — 36 livraisons . . . . . $ 15
Six mois — 18 livraisons . . . $ 7.50
(Séparément $ 0.50 le numéro)
«Nouvelle Série» pour 1933 — 6 livraisons . . . $ 2
«Nouvelle Série» pour 1934 — l'année complète épuisée; volume III (9 livraisons) et volume IV (9 livraisons) en vente à $ 3 le volume.

URSS — Meždunarodnaja Kniga, 18, Kuznetskij Most, Moscou (Compte courant n° 263 Banque d'Etat de l'URSS, 12, Neglinnaja, Moscou).
U. S. A., NORTH and SOUTH AMERICA — BOOKNIGA CORPORATION, 255 Fifth Avenue. New York, N. Y.
ENGLAND — W. H. SMITH & son, Ltd. Strand House, Portugal St London, W. C. 2.
FRANCE — MESSAGERIES HACHETTE. Service Abonnements. 111, Rue Réaumur. Paris, 2e.
SUISSE — Administration du Journal „LE TRAVAIL". 39, Rue de Lausanne. Genève.
Č. S. R. — MELANTRICH, Akc. Spol. Knihkupectvi — odd. slovanskych knih. Vaclavské nam 42. Praha II. (Ucet post. spor. 20. 208).
BELGIQUE — LIBRAIRIE A. U. S. 38 Vieille Halle-aux-Blés. Bruxelles (C. C. P. 1861. 15). (P, Driessen)
CHINA — AMERICAN BOOK & SUPPLY Co 841 Bubbling Well Road. P. O. Box 1798. Shanghai.
HOLLAND — J. GINSBERG. University Bookseller. Kort Rapenburg, 17. Leiden
LIETUVA — „MOKSLO". Knygynas. Laisves Aleja, 46. Kaunas.
TURQUIE — LIBRAIRIE HACHETTE. Succursale de Turquie. 469, Avenue de l'Indépendance. Boite Postale Pera 2219. Istanbul.
DEUTSCHLAND — OTTO HARROSSOWITZ. Leipzig C. 1. Auerstrasse 14.
POLSKA — GEBETHNER & WOLFF. Filja I. Krakowskie Przedm. 15. Warszawa.
ROSSICA. Chmielna 5, Warszawa.
PALESTINE — SAFRAN Co Jaffa Rd. 36. P. O. B. 223, Haifa.
LATVIJA — VALTERS un RAPA Akc. Sab. Teatra iela 11. Riga (Pasta tek. rek. № 675)
BULGARIA — T. F. TSCHIPEFF. Buchhandlung Boulevard Dondoukoff 20/22 Sofia. (Postscheckkonto-Sofia 540).
NORGE — JOHAN GRUNDT TANUM. Tidligere Aschehougs Boghandel. Karl Johans gt. 43. Oslo.

Les «Comptes Rendus», largement expédiés à l'étranger dans les centres scientifiques les plus importants et dans les bureaux de nombreuses revues, sont le seul organe scientifique en URSS, donnant tous les dix jours un compte rendu des plus récentes acquisitions de la science soviétique.

Prix — $ 0.50